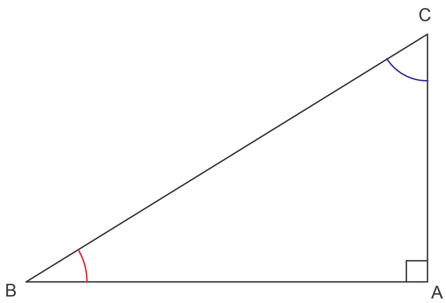
CHAPITRE 6 : TRIGONOMETRIE ET ANGLES INSCRITS

1 . *Relations entre les côtés d'un triangle rectangle*

a) *Cosinus d'un angle aigu*

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\cos \widehat{B} = \frac{BA}{BC}$$

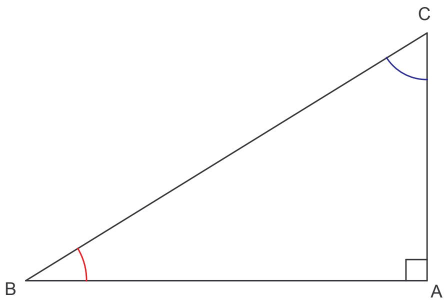
BA → Côté adjacent à $\widehat{B}$

BC → hypoténuse

on en déduit BA = BC $\times$ cos $\widehat{B}$

b) *Sinus d'un angle aigu*

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est égal au quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\sin \widehat{B} = \frac{CA}{CB}$$

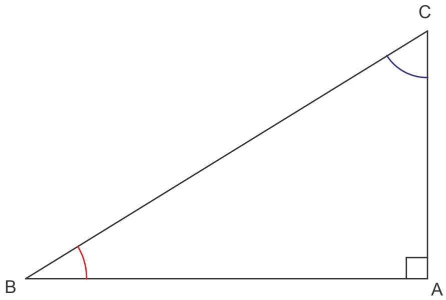
CA → côté opposé à $\widehat{B}$

CB → hypoténuse

On en déduit CA = CB $\times$ cos $\widehat{B}$

c) *Tangente d'un angle aigu*

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.



Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\tan \widehat{B} = \frac{AC}{AB}$$

AC → côté opposé à $\widehat{B}$

AB → côté adjacent à $\widehat{B}$

On en déduit AC = AB $\times$ tan $\widehat{B}$

d) Remarques

1. **Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont des valeurs comprises entre 0 et 1**. En effet l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand côté, donc le rapport côté/hypoténuse sera plus petit que 1.

2. Dans un triangle rectangle, quelle que soit la mesure x d'un angle aigu, on a : $\mathbf{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ (si $x \neq 90°$) et $\mathbf{\sin^2 x + \cos^2 x = 1.}$

   Démonstration :

   $\tan \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$, $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ et $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$

   d'où $\dfrac{\sin \widehat{B}}{\cos \widehat{B}} = \dfrac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \dfrac{AC}{BC} \times \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \tan \widehat{B}$

   Démonstration :

   $\sin^2 \widehat{B} = \dfrac{AC^2}{BC^2}$ et $\cos^2 \widehat{B} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$

   d'où $\sin^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = \dfrac{AC^2}{BC^2} + \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AC^2 + AB^2}{BC^2}$

   Or dans le triangle ABC rectangle en A, le théorème de Pythagore nous permet d'écrire : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

   D'où $\sin^2 \widehat{B} + \cos^2 \widehat{B} = \dfrac{BC^2}{BC^2} = 1$

3. Dans un triangle rectangle en A :

   $\cos \widehat{B} = \sin \widehat{C} = \dfrac{BA}{BC}$

   $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{C} = \dfrac{CA}{CB}$

   Ainsi, lorsque deux angles sont complémentaires, le cosinus de l'un est égal au sinus de l'autre.

On retient : pour tout angle aigu dans un triangle rectangle

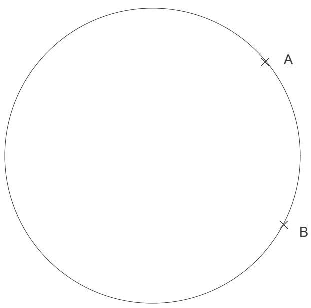
$$\text{cosinus} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{sinus} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

2 . *Angle inscrit et angle au centre*

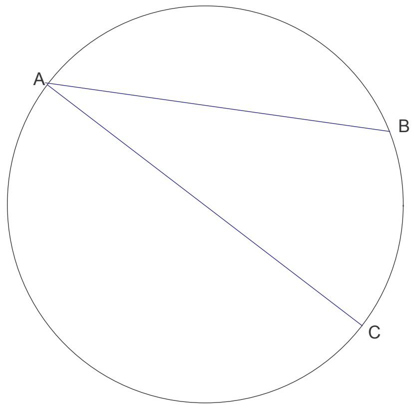
a. Arc de cercle



Sur un cercle, deux points A et B qui ne sont pas sur un même diamètre déterminent deux arcs de cercle de longueur différente. Nous ne nous intéresseront qu'à l'arc de cercle le plus petit que l'on désignera par la notation $\overset{\frown}{AB}$.

b. *Angle inscrit dans un cercle*

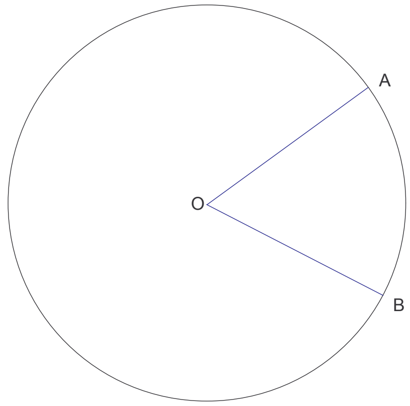
Un angle dont le sommet est sur un cercle et dont les côtés coupent le cercle est appelé angle inscrit dans le cercle.



Sur ce dessin, on dit que l'angle $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$.

c. *Angle au centre*

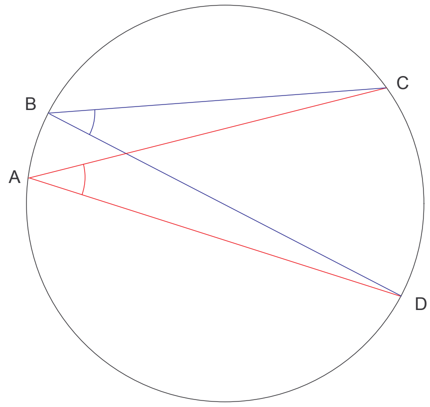
Un angle dont le sommet est le centre d'un cercle est appelé angle au centre de ce cercle.



Sur ce dessin, O est le centre du cercle, on dit que l'angle $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc AB.

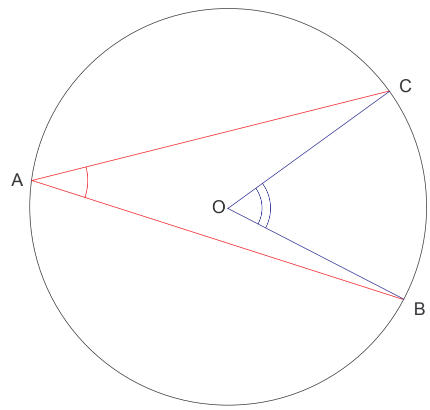
d. *Propriétés*

Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.



Sur le dessin, $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$

Si dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit.



Sur le dessin,
O est le centre du cercle
et $\widehat{BOC} = 2\ \widehat{BAC}$