4° : PROPORTIONNALITÉ POURCENTAGES

I. PROPORTIONNALITE

1/ DEFINITION

Deux grandeurs x et y sont dites proportionnelles lorsque pour passer de l'une à l'autre on multiplie par un même nombre k (non nul) appelé coefficient de proportionnalité.

On a $y = kx$ ou $x = \frac{1}{k}y$.

2/ TABLEAU DE PROPORTIONNALITE

Dans un tableau de proportionnalité (présenté en ligne), on passe de la première ligne à la deuxième en multipliant par le coefficient de proportionnalité k (et de la deuxième à la première en multipliant par $\frac{1}{k}$) . **Autrement dit, pour vérifier qu'un tableau est de proportionnalité, on peut calculer tous les quotients $\frac{y}{x}$ et vérifier qu'ils sont tous égaux (égaux à k)**.

On peut ajouter deux colonnes entre elles pour en former une troisième et on peut multiplier une colonne par un nombre pour en former une autre.

Enfin, si on considère deux colonnes d'un tableau de proportionnalité, on peut déterminer une quatrième proportionnelle à l'aide de l'égalité des produits en croix.

$\times\frac{1}{k}$ + ×n ×k

x	x_1	x_2	$x_3 = x_1+x_2$	x_4	$x_5 = n\times x_4$
y	y_1	y_2	$y_3 = y_1+y_2$	y_4	$y_5 = n\times y_4$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} = \frac{y_5}{x_5} = k$$

Détermination d'une quatrième proportionnelle :

a	b
c	x ?

L'égalité des **produits en croix** donne :

$a\times x = c\times b$

donc, $x = \frac{c\times b}{a}$

3/ REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITE

Si deux grandeurs sont proportionnelles, alors elles sont représentées graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère. Réciproquement, si deux grandeurs sont représentées graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère, alors elles sont proportionnelles.

II. VITESSES MOYENNES

On appelle **vitesse moyenne** d'un véhicule sur un trajet le quotient de la distance parcourue par la durée écoulée.

$$v = \frac{d}{t} \quad \text{(on a aussi } \mathbf{d = v \times t} \text{ et } \mathbf{t = \frac{d}{v}}\text{)}$$

Les unités utilisées sont des **grandeurs quotients** : km.h^{-1} (ou km/h) m.s^{-1} (m/s). Les unités des distances et des durées doivent concorder avec celle de la vitesse dans les formules précédentes, sinon on est amené à faire des conversions au préalable ...

→ ×60 →

1 h	**60 min**

← : 60 ←

→ ×60 →

1 min	**60 s**

← : 60 ←

→ ×3600 →

1 h	**3600 s**

← : 3600 ←

→ ×1000→

1 km	**1000 m**

← : 1000 ←

Pour convertir une vitesse il faut faire deux conversions :

Exemple : Une voiture roule pendant 5 h et parcourt 600 km. Sa vitesse moyenne est :

$$v = \frac{600 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 120 \text{ km.h}^{-1} = \frac{600\times1000 \text{ m}}{5\times3600 \text{ s}} = 33{,}33 \text{ m.s}^{-1}$$

On pourra retenir la règle de conversion suivante :

→ ×3,6→

m.s^{-1}	**km.h^{-1}**

← : 3,6 ←

Attention, un des pièges des exercices de calcul des vitesses est : la vitesse moyenne n'est (presque) jamais la moyenne des vitesses.

III. POURCENTAGES

Les calculs avec des pourcentages sont à relier avec la notion de proportionnalité puisque, par définition, calculer un pourcentage revient à calculer des quantités proportionnellement à 100.

Il faut toujours, avant de calculer un pourcentage, identifier le référent (la quantité par rapport à laquelle on calcule le pourcentage) et il vaut mieux traduire les calculs sur les pourcentages en termes de coefficient multiplicateur.

1/ POURCENTAGE D'UNE QUANTITE

Calculer t % d'une quantité revient à la multiplier par $\frac{t}{100}$.

$$x \xrightarrow{\text{t \% de x}} y = \frac{t}{100} \times x$$

On distingue trois types d'exercices basés sur le schéma ci-contre : on donne deux des valeurs et il faut calculer la troisième.

Calculer 25 % de 155 F. $\frac{25}{100}\times 155 = \ldots\ldots \times 155 = \ldots\ldots$ Donc 25 % de 155 F font ……	Les 67 % de la masse d'un objet pèsent 166,16 Kg. Combien pèse cet objet ? Si on note x la masse en Kg de cet objet, on doit avoir : $\frac{67}{100}\times\ldots\ldots = \ldots\ldots$ Donc ……… = ……. Donc …… $= \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$ La masse cherchée est ………	t % d'une classe de 40 élèves représentent 6 élèves. Calculer t. On doit avoir : $\frac{t}{100}\times\ldots\ldots = \ldots\ldots$ Donc t ×……… = …… Donc $t = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$ Donc 6 élèves représentent ….. % des 40 élèves.

2/ VARIATION EN POURCENTAGE D'UNE QUANTITE

Commentaire : Officiellement ce n'est au programme qu'en classe de troisième mais bon, dans la lancée ...

Faire varier une quantité de t % (augmentation ou diminution) revient à la multiplier par $(1 \pm \frac{t}{100})$.

$$x \xrightarrow{\pm \text{t \% de x}} y = (1 \pm \frac{t}{100}) \times x$$

On distingue trois types d'exercices basés sur le schéma ci-contre : on donne deux des valeurs et il faut calculer la troisième.

Augmenter le volume 135 m^3 de 18 % et noter V le volume ainsi obtenu. On doit avoir : $V = (\ldots\ ..\ \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots})\times 135$ Donc $V = \ldots\ldots\times 135 = \ldots\ldots\ m^3$	En 2000, le nombre d'employés d'une entreprise augmentait de 5,2 % pour atteindre 526 en 2001. Calculer le nombre d'employés N en 2000. On doit avoir : $\ldots\ldots\times(\ldots\ ..\ \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}) = \ldots\ldots$ Donc ……×…… = …… Donc $N = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$	Un enfant mesurant 150 cm grandit et atteint 162 cm. Exprimer en % cette variation. On doit avoir : $\ldots\ldots\times(\ldots\ ..\ \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}) = \ldots\ldots$ L'équation n'étant pas simple, on simplifie en écrivant que l'enfant a grandi de 162 – 150 = ... cm. Donc $\frac{t}{100}\times\ldots\ldots = \ldots\ldots$
Diminuer le volume 135 m^3 de 18 % et noter V le volume ainsi obtenu. On doit avoir : $V = (\ldots\ ..\ \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots})\times 135$ Donc $V = \ldots\ldots\times 135 = \ldots\ldots\ m^3$	En 2000, le nombre d'employés d'une entreprise diminuait de 5,2 % pour atteindre 474 en 2001. Calculer le nombre d'employés N en 2000. On doit avoir : $\ldots\ldots\times(\ldots\ ..\ \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}) = \ldots\ldots$ Donc ……×…… = …… Donc $N = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$	Un article coûtant 150 F est soldé 120 F. Exprimer en % cette variation. La réduction est de : .... On doit avoir : $\frac{t}{100}\times\ldots\ldots = \ldots\ldots$