CORRECTION DE L'EXAMEN DE FIN D'ANNEE 2003
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

1. PARTIE NUMERIQUE : 14 points

Exercice 1

Effectue les calculs suivants en inscrivant toutes les étapes :

A = [4 - (- 6 + 7) + (4 - 3)] = [4 – 1 + 1] = 4	B = - (- 6 - (- 1 + 4)) = - (-6 – 3) = - (-9) = 9	C = (7 - (2 + 3) - (- 1) + (- 7)) = (7 – 5 + 1 – 7) = -4
D = - (- (- (- 5))) = 5	E = - 4 - 5 × (- 2) = -4 – (-10) = -4 + 10 = 6	F = 3 + 5 × (- 7 + 2) = 3 + 5 × (-5) = 3 + (-25) = - 22
G = - 9 - 15 : (- 3) + 7 = -9 – (-5) + 7 = -9 + 5 + 7 = 3	H = 4 - 7 × (3 - 2 × (- 1)) = 4 – 7 × (3 – (-2)) = 4 – 7 × 5 = 4 – 35 = - 31	

Exercice 2

Calcule les nombres suivants, les résultats seront donnés sous la forme d'une fraction irréductible :

$A = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{25}{7}$ $A = \frac{3}{2} - \frac{5\times5}{5\times7}$ $A = \frac{3}{2} - \frac{5}{7}$ $A = \frac{21}{14} - \frac{10}{14}$ $A = \frac{11}{14}$	$B = \left(\frac{2}{8} - \frac{3}{15}\right) \div \frac{3}{10}$ $B = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{10}{3}$ $B = \left(\frac{5}{20} - \frac{4}{20}\right) \times \frac{10}{3}$ $B = \frac{1}{20} \times \frac{10}{3}$ $B = \frac{10}{2\times10\times3}$ $B = \frac{1}{6}$	$C = \dfrac{\frac{5}{4} + \frac{2}{5}}{2 - \frac{7}{5}}$ $C = \dfrac{\frac{25}{20} + \frac{8}{20}}{\frac{10}{5} - \frac{7}{5}}$ $C = \dfrac{\frac{33}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{33}{20} \times \frac{5}{3}$ $C = \frac{3\times11\times5}{4\times5\times3}$ $C = \frac{11}{4}$	$D = \frac{24}{15} \div \frac{36}{25}$ $D = \frac{8}{5} \times \frac{25}{36}$ $D = \frac{2\times4\times5\times5}{5\times4\times9}$ $D = \frac{10}{9}$

$$E = \frac{72}{162} \div \frac{108}{54} = \frac{4}{9} \div 2 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

$$F = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 1}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = \dfrac{\frac{4}{6} - \frac{15}{6} + \frac{6}{6}}{\frac{24}{30} - \frac{20}{30} + \frac{45}{30}} = \dfrac{-\frac{5}{6}}{\frac{49}{30}} = -\frac{5}{6} \times \frac{30}{49} = -\frac{25}{49}$$

Exercice 3

a) $A = 7 + 3 \times 2^3$ $B = \frac{4^5}{4^8}$ $C = \frac{\cancel{2^7 \times 5^7}}{10^9}$ $D = 10^{-8} \times 10^2$

$A = 7 + 3 * 4$ $B = 4^{5-8}$ $C = \frac{(2\times 5)^7}{10^9}$ $D = 10^{-8+2}$

$A = 7 + 12$ $B = 4^{-3}$ $C = \frac{10^7}{10^9}$ $D = 10^{-6}$

$A = 19$ $C = 10^{-2}$

$E = 10^3 \times (10^2)^5$
$E = 10^3 \times 10^{10}$
$E = 10^{3+10}$
$E = 10^{13}$

$F = 7{,}5 \times 10^3 + 35 \times 10^{-2}$
$F = 7500 + 0{,}35$
$F = 7500{,}35$

b) *Donner la notation scientifique des nombres suivants* :
$36\,000 = 3{,}6\times10^4$; $0{,}000\,25 = 2{,}5\times10^{-4}$; $135\times10^3 = 1{,}35\times10^5$;
$0{,}36\times10^4 = 3{,}6\times10^3$

c) *Un carré a pour côté* 2^4 *cm*. Exprimer *sous la forme* 2^n *son périmètre, puis son aire.*
Périmètre = 4×côté d'où $P = 4\times2^4 = 2^2\times2^4 = 2^{2+4} = 2^6$ cm
Aire = côté×côté d'où $A = 2^4\times2^4 = 2^{4+4} = 2^8$ cm²

Exercice 4

a) Réduire, si possible, les expressions suivantes :

$A = 5a + 2 + 9a$
$A = 14a + 2$

$C = 4 + 3x^2$
impossible de réduire

$B = 3\times 2x + 5\times3x$
$B = 6x + 15x$
$B = 21x$

$D = -8\times4x + 2\times8x - 4\times2x$
$D = -32x + 16x - 8x$
$D = -24x$

b) Développer et réduire les expressions suivantes :

$E = 2(3c - 5) - (4c + 3)\times6$
$E = 6c - 10 - 24c - 18$
$E = -18c - 28$

$G = 5b(-2b - 4) - b(3b - 7)$
$G = -10b^2 - 20b - 3b^2 + 7b$
$G = -13b^2 - 13b$

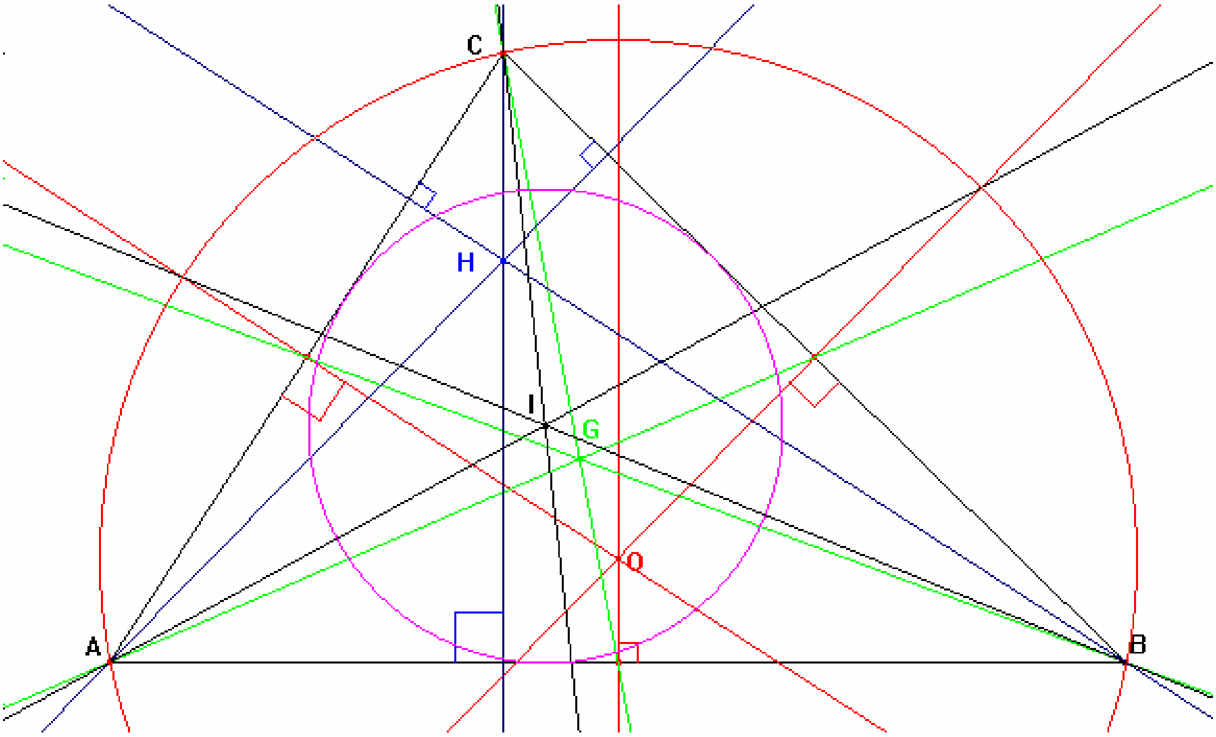
$F = (-8x + 5)(-2x + 4)$
$F = 16x^2 - 32x - 10x + 20$
$F = 16x^2 - 42x + 20$

$H = (3 + 4x)(-2x - 5) - 6x^2 + 2$
$H = -6x - 15 - 8x^2 - 20x - 6x^2 + 2$
$H = -14x^2 - 26x - 13$

c) Un rectangle a pour largeur $(x + 3)$. Sa longueur est le double de sa largeur.
* Exprimer la longueur en fonction de x :
$L = 2\times l = 2\times(x+3) = 2x+6$
* Exprimer le périmètre du rectangle en fonction de x :
$P = 2\times(L+l) = 2\times(2x+6 + x+3)$
* Développer et réduire l'expression du périmètre.
$P = 2\times(3x+9) = 6x + 18$
* Quel est le lien entre l'expression du périmètre et celle de la longueur ?
On remarque que $P = 3\times(2x+6)$, donc le périmètre est égale à trois fois la longueur.

2. PARTIE GEOMETRIQUE : 12 points

Exercice 1 :

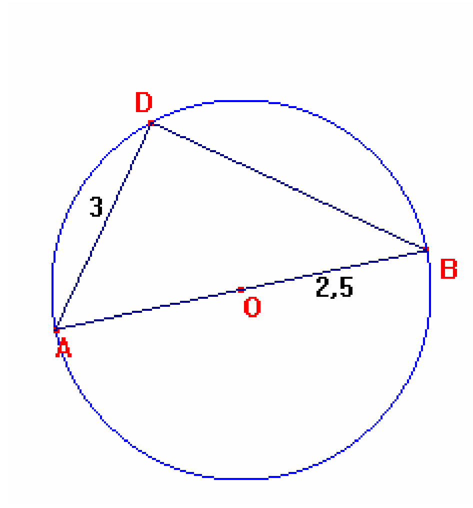


Exercice 2 :

1. Le quadrilatère ABCD semble être un parallélogramme.
2. **a)** Dans le triangle RST, on sait que A est le milieu de [RS] et B est le milieu de [ST];
   Or dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.
   Donc (AB) // (RT)
   De même, dans le triangle RTU, D est le milieu de [TU] et C est le milieu de [TU], donc (CD) // (RT).
   Or, si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
   Donc (AB) // (CD).
   b) Dans le triangle RSU, on sait que A est le milieu de [RS] et D milieu de [RU], donc (AD) // (US).
   Dans le triangle STU, on sait que B est le milieu de [ST] et C milieu de [TU], donc (BC) // (US).
   Or, si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
   Donc (AD) // (BC).
   c) Dans le quadrilatère ABCD, on sait que (AB) // (CD) et (AD) // (BC).
   Or, si un quadrilatère a ses côtés opposé parallèles, alors c'est un parallélogramme.
   Donc ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3

1. Figure :

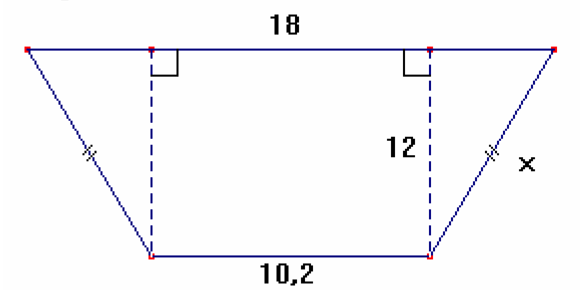


2. On sait que [AB] est un diamètre du cercle et que le point D est sur le cercle.
   Or, si un triangle s'inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'un des côtés du triangle, alors ce triangle est rectangle et ce côté est l'hypoténuse.
   Donc le triangle ABD est rectangle en D.
3. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABD rectangle en D :
   $AB^2 = AD^2 + BD^2$
   d'où $BD^2 = AB^2 - AD^2$
   $BD^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
   $BD = \sqrt{16}$ BD = 4 cm

3. PROBLEME : 10 points « Les deux voisins »

Jardin de M Demling

1) Le jardin de M Demling est un trapèze isocèle de grande base B = 18m = 1800 cm, de petite base b = 10,2 m = 1020 cm et de hauteur h = 12m = 1200 cm.
2) L'aire d'un trapèze a pour formule : $A = \frac{(B+b)\times h}{2}$
   donc ici : $A = \frac{(1800+1020)\times 1200}{2} = 2820 \times 600 =$ 1 692 000 cm².
3) Pour connaître le périmètre de ce trapèze, il faut d'abord calculer la longueur des côtés obliques.



Ces côtés obliques sont les hypoténuses de deux triangles rectangles identiques dont les côtés mesurent 1200 cm et (1800 − 1020) : 2 = 390 cm. Si on applique le théorème de Pythagore dans l'un de ces triangles, on a : $x^2 = 1200^2 + 390^2 = 1\,592\,100$
d'où x ó 1 261,8 cm.
On en déduit la mesure du périmètre : P = 1 800 + 1 020 + 2×1 261,8 = 5 343,6 cm.

Jardin de M Klaus

1) Le jardin de M Klaus est un rectangle dont l'un des côtés est commun avec l'un des côtés non parallèles du jardin de M Demling, et qui a la même aire.
   Donc l'un des côtés a pour longueur x (voir ci-dessus) : x ó 1 261,8 cm.
   L'autre a pour mesure 1 692 000 ÷ 1 261,8 ó 1 341 cm.
   Ce terrain est donc un rectangle de longueur 1 341 cm et de largeur 1 261,8 cm.

2) L'aire du jardin de M Klaus est la même que celle du jardin de M Demling :
A = 1 692 000 m²

3) Le périmètre du jardin sera : $P = 2 \times (L + l)$ soit
$P = 2 \times (1\ 341 + 1\ 261{,}8) = 2 \times 2\ 602{,}8 = 5\ 205{,}6$ cm.

Un problème de piquets

1) Le terrain de M Demling a un périmètre de 5 343,6 cm et il veut installer un piquet tous les 90 cm :
Il lui faudra au moins : $5\ 343{,}6 \div 90 = 59{,}4$
M Demling devra donc acheter 60 piquets.

2) Le terrain de M Klaus a un périmètre de 5 205,6 cm et il veut installer un piquet tous les 60 cm :
Il lui faudra au moins : $5\ 205{,}6 \div 60 = 86{,}8$
M Klaus devra donc acheter 87 piquets.

3) Le côté commun aux deux terrains a une longueur de 1 261,8 cm.
Si M Demling place un piquet tous les 90 cm, y compris le premier au début du terrain, il aura $1\ 261{,}8 \div 90 + 1 =$ 15 piquets à placer.

4) Si M Klaus place un piquet tous les 60 cm, y compris le premier au début du terrain, il aura $1\ 261{,}8 \div 60 + 1 =$ 22 piquets à placer.

5) Il suffit de compter le nombre de multiples communs à 90 et 60 inférieurs à 1261,8 pour connaître le nombre de piquets face à face :
* 0 , 90 , 180 , 270 , 360 , 450 , 540 , 630 , 720 , 810 , 900 , 990 , 1080 , 1170 , 1260.
* 0 , 60 , 120 , 180 , 240 , 300 , 360 , 420 , 480 , 540 , 600 , 660 , 720 , 780 , 840 , 900 , 960 , 1020 , 1080 , 1140 , 1200 , 1260.
On peut compter 8 piquets face à face.