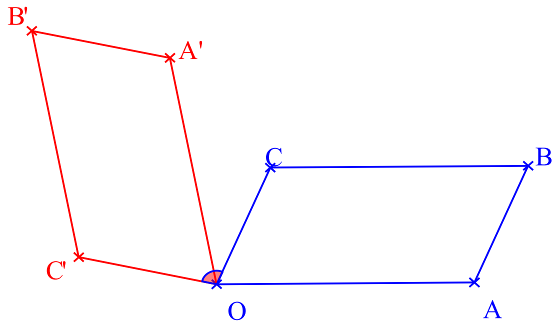
Prérequis : Angles orientés, rotation, isométrie

Propriété

Soit r une rotation d'angle α .
- Étant donnés des points distincts A et B d'images A' et B', on a :
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \alpha \quad [2\pi]$.
- Une rotation conserve les angles orientés.



On appelle C le point tel que OABC soit un parallélogramme.
Soit C' l'image de C par r.
La rotation étant une isométrie, l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.
Donc OA'B'C' est un parallélogramme.
Alors on a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OC'}$
On en déduit $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})=(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}) = \alpha \quad [2\pi]$

Conservation des angles :
D'après la relation de Chasles, on peut écrire :
$(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'})$
Or $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{AB})=-(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = -\alpha$
et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'C'}) = \alpha$
d'où $(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

Les angles orientés sont conservés.