Raisonnement par l'absurde :

On suppose qu'il existe une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ telle que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q nombres entiers.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

Or si $p^2 = 2q^2$ alors p^2 est pair et donc p est pair aussi.

Donc il existe un entier k tel que $p = 2k$

D'où $p^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$

Or si $2k^2 = q^2$ alors q^2 est pair et donc q est pair aussi.

Si p et q sont pairs tous les deux, alors $\frac{p}{q}$ n'est pas une fraction irréductible, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

Propriété :

Si n est impair, alors n^2 est impair ⇔ Si n^2 est pair alors n est pair.

- Si n est impair, alors il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$.
  $n^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2\,(2p^2 + 2p) + 1$
  Donc n^2 est un nombre impair.

- Si n^2 est pair alors, d'après ce qui précède, il peut s'écrire sous la forme :
  $n^2 = 2\,(2p^2 + 2p) = 4\,(p^2 + p)$.
  Or, $\sqrt{4(p^2+p)} = \sqrt{4} \times \sqrt{p^2+p} = 2 \times \sqrt{p^2+p}$
  C'est donc un nombre pair.