LEÇON 38 : RELATIONS MÉTRIQUES ET TRIGONOMÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE QUELCONQUE. APPLICATIONS.

Niveau : Première S

Prérequis :
i) Produit scalaire : Définitions (par distances et angles et par projections) et Propriétés
ii) Angles géométriques (conservation par une symétrie centrale)
iii) Définition du cosinus et du sinus : dans un triangle rectangle (angle aigu) et dans le cercle trigonométrique
iv) Théorème de Pythagore (avec réciproque) et formules de trigonométrie élémentaires
iv) Droites remarquables d'un triangle : hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices
iv) Théorème de l'angle inscrit

On se place dans $\mathcal{P}$ plan affine euclidien (associé au plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$)
On considérera, dans toute la leçon, un triangle ABC non aplati et on notera :
a = BC, b = AC et c = AB les longueurs des côtés et $\widehat{A} = \widehat{CAB}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{BCA}$ les angles géométriques ($\in]0,\pi[$)

But : Déterminer dans un triangle les trois longueurs et les trois angles géométriques.

I. Relations métriques

1. Théorème de la médiane

Théorème 1 :
Soit I milieu de [AB]
Alors, on a :
$i) \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = CI^2 - \frac{AB^2}{4}$
$ii) CA^2 + CB^2 = 2CI^2 + \frac{AB^2}{2}$
$iii) CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} i) \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}) \\ &= CI^2 + \overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ &= CI^2 + \overrightarrow{CI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ &= CI^2 + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \quad avec\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \quad \text{puique Imilieu de[AB]} \end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} = \frac{1}{4}AB^2$
D'où le résultat.
ii) et iii) On a $CA^2 = (\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA})^2 = (\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IC})^2 = IA^2 + IC^2 - 2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$
et $CB^2 = IB^2 + IC^2 - 2\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$
D'où $CA^2 + CB^2 = 2IC^2 + IA^2 + IB^2 - 2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{IC} = 2IC^2 + IA^2 + IB^2 = 2IC^2 + \frac{AB^2}{2}$
et $CA^2 - CB^2 = IA^2 - IB^2 - 2(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{AB}$

2. Formule des aires

Proposition 1 :

L'aire du triangle ABC est donnée par
$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ Base × Hauteur = $\frac{1}{2}$ $AH_A \times BC$ où H_A est le pied de la hauteur issue de A

Démonstration : Rappel : L'aire d'un triangle rectangle en A est S = $\frac{1}{2}$ AB × BC (c'est la moitié de l'aire d'un rectangle)

i) 1er cas : H ∈ [BC] (i.e. l'angle $\widehat{A}$ est aigu)
On a $S_{ABC} = S_{ABH} + S_{AHC}$

$$=\frac{1}{2}AH\times BH+\frac{1}{2}AH\times HC$$
$$=\frac{1}{2}AH\times(BH+HC)$$
$$=\frac{1}{2}AH\times BC \text{ car } H \in[BC]$$

ii) 2ème cas : H ∉ [BC] (i.e. l'angle $\widehat{A}$ est obtus)
On a $S_{ABC} = S_{ABH} - S_{AHC}$

$$=\frac{1}{2}AH\times BH-\frac{1}{2}AH\times HC$$
$$=\frac{1}{2}AH\times BC$$

Remarques :
i) Par permutation circulaire (sur A, B, C), on obtient les deux autres formules suivantes :
$S_{ABC} = \frac{1}{2}\, BH_B \times AC$ et $S_{ABC} = \frac{1}{2}\, CH_C \times AB$ où H_B (resp. H_C) est le pied de la hauteur issue de B (resp. C)
ii) En particulier, deux triangles ayant une hauteur commune ont des aires proportionnelles à leur base.

Proposition 2 :
Soit ABC un triangle non aplati
Alors S_{ABC} = pr où p = $\frac{1}{2}$(a + b + c) est le demi-périmètre et r est le rayon du cercle inscrit dans ABC

Démonstration :
C'est un corollaire de la proposition 1.
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, intersection des 3 bissectrices intérieures.
On sait que les points de la bissectrice intérieure δ_A issue du sommet A sont équidistants de (AB) et (AC) (c'est une caractérisation métrique des bissectrices).
On a donc $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr$

II. Relations trigonométriques

1. Somme des angles d'un triangle

Théorème 2 :
La somme des angles géométriques d'un triangle est un angle plat.
La somme des mesures des angles d'un triangle vaut π

Démonstration :
i) On considère B' et C' les images respectives de B et C par la symétrie centrale de centre A.
On mène en A la parallèle $\mathcal{D}$ à (BC) et on note A' = $\mathcal{D} \cap$ (BC') et A" = $\mathcal{D} \cap$ (CB').
On a alors :

$$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\widehat{CAB}+\widehat{ABC}+\widehat{BCA}$$
$$=\widehat{C'AB'}+\widehat{B'AA''}+\widehat{A'AC'}$$

(les symétries centrales conservant les angles orientés)
i.e. $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\widehat{A'AA''}$ qui est un angle plat.
ii) Autre démonstration (par les angles orientés)
Si on oriente le plan tel que ABC soit un triangle direct, on a :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\widehat{A}[2\pi],(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\widehat{B}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\widehat{C}[2\pi]$
Donc :

$\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})[2\pi]$
$=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=[2\pi]$
$=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA})=\pi[2\pi]$ (par la relation de Chasles)
D'où $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi+2k\pi[2\pi]k\in\mathbb{Z}$
Or $0<\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}<\pi$ donc $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}\in]0,3\pi[$ i.e. k = 0 et le résultat.

2. Formules d'Al Kashi

Théorème 3 :
Dans le triangle ABC, on a : $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{A}$

Démonstration :
On a $a^2=BC^2=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ (symétrie du produit scalaire)
$=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos\widehat{A}=b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{A}$ (par définition du produit scalaire)

Remarques :
i) Par permutation circulaire (sur A, B, C), on obtient les deux autres formules suivantes :
$b^2=a^2+c^2-2ac\times\cos\widehat{B}$ et $c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos\widehat{C}$
ii) Si ABC est rectangle (en A, i.e. $\widehat{A}=\frac{\pi}{2}$), on retrouve le théorème de Pythagore.
On appelle aussi ces formules, les relations de Pythagore généralisé.
iii) On retrouve également l'inégalité triangulaire : $|b - c| \leq a \leq b + c$ (avec égalité ssi $\widehat{A}$ est nul ou plat).
En effet, on a $-1\leq\cos\widehat{A}\leq 1$ d'où $-2bc \leq b^2+c^2-a^2\leq 2bc$ puis $(b-c)^2\leq a^2\leq(b+c)^2$ et le résultat.

3. Aire d'un triangle

Proposition 3 :
L'aire du triangle ABC est donnée par $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\times\sin\widehat{C}$

Démonstration :
Soit H le pied de la hauteur issue de A.
On a vu que $S_{ABC} = \frac{1}{2}$ BC × AH = $\frac{1}{2}$ a × AH
Deux cas se présentent alors :
i) 1er cas : l'angle $\widehat{C}$ est aigu
On a $AH=AC\times\sin\widehat{C}=b\sin\widehat{C}$
par définition du sinus dans le triangle rectangle AHC
ii) 2ème cas : l'angle $\widehat{C}$ est obtus.
On a $AH=AC\times\sin(\pi-\widehat{C})=b\sin\widehat{C}$ avec $\sin(\pi-x)=\sin x\,\forall x\in\mathbb{R}$
par définition du sinus dans le triangle rectangle AHC
D'où le résultat, i.e. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\times\sin\widehat{C}$

Remarque :
De même, par permutation circulaire, on obtient : $S_{ABC} = \frac{1}{2}bc\times\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\times\sin\widehat{B}$

4. Formule des sinus

Proposition 4 :

Dans le triangle ABC (non aplati), on a : $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}\left(=\frac{abc}{2S}\right)$

Démonstration :
C'est un corollaire de la proposition 3.
En effet, on a : $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\times\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}bc\times\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\times\sin\widehat{B}$
donc après multiplication de cette égalité par $\frac{2}{abc}$, on obtient : $\frac{2S}{abc}=\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}$
D'où le résultat en prenant l'inverse, avec $\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C}\in]0;\pi[$, i.e. $\sin\widehat{A},\sin\widehat{B},\sin\widehat{C}\neq 0$ (ABC non aplati)

5. Rayon du cercle circonscrit

Proposition :
Dans le triangle ABC (non aplati), on a : $R=\frac{a}{2\sin\widehat{A}}=\frac{b}{2\sin\widehat{B}}=\frac{c}{2\sin\widehat{C}}=\frac{abc}{4S_{ABC}}$ Rayon du cercle circonscrit

Démonstration :
Soit O le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC (point de concours des médiatrices)
- Si le triangle est rectangle en A, alors [BC] est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc a = BC = 2R et $\sin\widehat{A}=1$
d'où $\frac{a}{\sin\widehat{A}}=2R$ et le résultat avec la formule des sinus.
- Sinon, on introduit le point D diamétralement opposé à B.
Le triangle BCD étant rectangle en C, on a $\sin\widehat{D}=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}$ par définition du sinus.
Deux cas sont alors à distinguer :
i) 1er cas : l'angle $\widehat{A}$ est aigu.
Le théorème de l'angle inscrit (i.e. dans un cercle, l'angle inscrit est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc) nous assure que les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux (i.e. $\widehat{A}=\widehat{D}=\frac{1}{2}\widehat{O}$)
D'où $\sin\widehat{A}=\sin\widehat{D}$
ii) 2ème cas : l'angle $\widehat{A}$ est obtus.
Le théorème de l'angle inscrit nous assure que les angles inscrits $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont supplémentaires :
$\widehat{A}=\frac{1}{2}\widehat{O}$ et $\widehat{D}=\frac{2\pi-\widehat{O}}{2}=\pi-\widehat{A}$
D'où $\sin\widehat{A}=\sin(\pi-\widehat{D})=\sin\widehat{D}$
Ainsi $\sin\widehat{A}=\frac{a}{2R}$ i.e. $R=\frac{a}{2\sin\widehat{A}}$ avec $\sin\widehat{A}\neq 0$ car $\widehat{A}\in]0;\pi[$
Et le résultat, à l'aide de la formule des sinus.

Conclusion :
A l'orientation près, un triangle est entièrement déterminer par :
i) La donnée des trois longueurs
qui nous permet via les formules d'Al Kashi de déterminer les cosinus des angles
puis les angles géométriques eux-mêmes puisque le cosinus est bijectif de $]0,\pi[$ dans]-1,1[
ii) La donnée de deux longueurs et d'un angle
qui nous permet le calcul de la 3ème longueur, avec la formule d'Al Kashi faisant intervenir le cosinus de l'angle donné; puis les cosinus des deux autres angles, donc les angles eux-mêmes, via les deux autres formules d'Al Kashi.
iii) La donnée d'une longueur et de deux angles
qui nous fournit le 3ème angle sachant que $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$
puis les deux autres longueurs par la formule des sinus.

Remarques :
i) Par contre, la donnée de trois angles ne suffit pas !
On a avec les formules d'Al Kashi un système de trois équations en les longueurs a, b, c qui, avec la formule des sinus, admet une infinité de solutions (toutes proportionnelles) (où $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\pi$)
ii) Si on remplace la donnée des angles par la donnée de leur cosinus, le résultat reste vrai.

Si on remplace la donnée des angles par la donnée de leur sinus, le résultat n'est plus exact : on perd l'unicité !

III. Applications

1. Identité du parallélogramme

Proposition :
Soit ABCD un parallélogramme (non aplati) de centre O.
Alors $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

Démonstration :
C'est une application directe du théorème de la médiane - i)
On a dans ABC : $AB^2+BC^2=2OB^2+\frac{AC^2}{2}$
puis dans ACD : $AD^2+CD^2=2OD^2+\frac{AC^2}{2}$
D'où, par sommation,
$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + 2(OB^2 + OD^2) = AC^2 + BD^2$, $O \in [BD]$.

2. Lignes de niveau

Proposition :
i) Si $f:M\longmapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$: Soit $\mathcal{C}_k=\left\{M\in\mathcal{P}/\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k,k\in\mathbb{R}\right\}$ et $d=\frac{AB^2}{4}$
Alors :

- si $k + d < 0$: $\mathcal{C}_k=\emptyset$
- si $k = -d$: $\mathcal{C}_k=\{I\}$ où I milieu de [AB]
- si $k + d > 0$: $\mathcal{C}_k$ est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+d}$

ii) Si $f:M\longmapsto MA^2+MB^2$: Soit $\mathcal{C}'_k=\left\{M\in\mathcal{P}/MA^2+MB^2=k,k\in\mathbb{R}\right\}$ et $d=\frac{AB^2}{2}$
Alors :

- si $k - d < 0$: $\mathcal{C}'_k=\emptyset$
- si $k = d$: $\mathcal{C}'_k=\{I\}$ où I milieu de [AB]
- si $k - d > 0$: $\mathcal{C}'_k$ est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{k-d}{2}}$

iii) Si $f:M\longmapsto MA^2-MB^2$: Soit $\mathcal{D}_k=\left\{M\in\mathcal{P}/MA^2-MB^2=k,k\in\mathbb{R}\right\}$
Alors :
$\mathcal{D}_k$ est une droite perpendiculaire à (AB) en H tel que $\overrightarrow{IH}=\frac{k}{2AB^2}\overrightarrow{AB}$

Démonstration :
C'est une application du théorème de la médiane - i), ii) et iii).
i) Le théorème 1 - i) nous donne : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$. D'où $M\in\mathcal{C}_k\Leftrightarrow MI^2=k+d$ et le résultat.
ii) Le théorème 1 - ii) nous donne : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$. D'où $M\in\mathcal{C}'_k\Leftrightarrow 2MI^2=k-d$ et le résultat.
iii) Le théorème 1 - iii) nous donne : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$ D'où $M\in\mathcal{D}_k\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=k$
On introduit alors H le projeté orthogonal de M sur (AB). On a $2(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HM})\cdot\overrightarrow{AB}=k$
i.e. $2\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{AB}=k$; donc $2\overrightarrow{IH}\cdot(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IH}=\frac{k}{2AB^2}\overrightarrow{AB}$

3. Formule de Héron

Proposition :
L'aire d'un triangle ABC (non aplati) est donnée par : $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p est le demi-périmètre

Démonstration :
C'est une application des formules d'Al Kashi et de la formule du sinus.
On a $\cos\widehat{A} = \frac{a^2-(b^2+c^2)}{2bc}$ et $\sin\widehat{A} = \frac{2S}{bc}$
Ainsi $\cos^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{A}=1$ s'écrit, après multiplication par $4b^2c^2 \neq 0$, $(a^2 - (b^2 + c^2))^2 + 16S^2 = 4b^2c^2$
D'où : $16S^2 = 4b^2c^2 - (a^2 - (b^2 + c^2))^2 = (2bc - a^2 - (b^2 + c^2))(2bc + a^2 - (b^2 + c^2))$ (identité remarquable)
$= ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b + c)^2) = (b + c - a)(b + c + a)(a - b + c)(a + b - c)$ (identités remarquables)
$= 2(p - a)2p(2p - b)(2p - c) = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$ avec $2p = a + b + c$

Remarque :
Conséquence : Avec S = pr, on obtient $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

4. Bissectrices

Proposition :
Soit un triangle ABC (non aplati).
On note a = BC, b = AC et c = AB, A' l'intersection de [BC] et de la bissectrice intérieure issue de A.
La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ divise le côté [BC] en un rapport proportionnel aux côtés [AB] et [AC] "adjacents" à l'angle $\widehat{A}$
i.e. $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

Démonstration :
C'est une application de la formule des sinus.
On a vu que deux triangles ayant une hauteur commune ont des aires proportionnelles à leur base; ainsi $\frac{S_{ABA'}}{S_{AA'C}} = \frac{A'B}{A'C}$
Or $S_{ABA'} = \frac{1}{2}c \times AA' \times \sin\frac{\widehat{A}}{2}$ et $S_{AA'C} = \frac{1}{2}b \times AA' \times \sin\frac{\widehat{A}}{2}$
D'où, par identification, $\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

5. Caractérisation angulaire d'un triangle rectangle

Proposition :
Un triangle ABC (non aplati) est rectangle si et seulement si $\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}=2$

Démonstration :
i) $\Rightarrow$: Si ABC est rectangle en A (par exemple), on a $\sin\widehat{A}=1$
Puis, par définition du cosinus et du sinus dans un triangle rectangle, $\sin\widehat{B}=\cos\widehat{C}$
Ainsi $\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}=1+\sin^2\widehat{B}+(1-\cos^2\widehat{C})=2$
ii) $\Leftarrow$: Si $\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}=2$
On sait que le rayon du cercle circonscrit vérifie $2R=\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$
D'où $4R^2=\frac{a^2}{\sin^2\widehat{A}}=\frac{b^2}{\sin^2\widehat{B}}=\frac{c^2}{\sin^2\widehat{C}}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\sin^2\widehat{A}+\sin^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{C}}$ i.e. $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$
On considère le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABC.
Soit A' le point diamétralement opposé à A.
Le triangle AA'B est rectangle en B, donc par le théorème de Pythagore, on a $AA'^2 = A'B^2 + AB^2$
De même, pour AA'C, où l'on a $AA'^2 = A'C^2 + AC^2$

D'autre part, on a $a^2=b^2+c^2-2bc\times\cos\widehat{A}$ (Al Kashi)
d'où $8R^2=2b^2+2c^2-2bc\times\cos\widehat{A}$ et $4R^2=b^2+c^2-bc\times\cos\widehat{A}$
Ainsi $A'B^2=AA'^2-c^2=4R^2-c^2=b^2-bc\times\cos\widehat{A}$

$$=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Et, de même, on a $A'C^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$
Donc, $A'B^2+A'C^2=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=BC^2$
Enfin, si A', B et C sont alignés :

Comme A', B et C appartiennent au cercle circonscrit $\mathcal{C}$ et que B $\neq$ C (ABC non aplati), on a nécessairement A' = B ou A' = C.
Or A' = B $\Rightarrow$ [AB] est un diamètre de $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ ABC est rectangle en C
et A' = C $\Rightarrow$ [AC] est un diamètre de $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ ABC est rectangle en B

et si A',B et C ne sont pas alignés :

La réciproque du théorème de Pythagore nous donne A'BC rectangle en A'
donc [BC] est un diamètre de $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$ ABC est rectangle en A.

6. Inégalité isopérimétrique

Proposition :
$S\leq p^2\frac{\sqrt{3}}{9}$ avec égalité ssi le triangle est équilatéral

Démonstration :
Elle repose sur l'inégalité arithmético-géométrique : $\forall x_1,x_2,\dots,x_n>0$ on a : $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\geq(x_1x_2\dots x_n)^{\frac{1}{n}}$
Démonstration : Première : Par récurrence sur n / Terminale : on a en utilisant n-1 fois la concavité de ln
On l'applique aux trois nombres p - a, p - b et p - c, d'où $3[(p-a)(p-b)(p-c)]^{\frac{1}{3}}\leq p$ avec égalité ssi a = b = c.
Puis, d'après la formule de Héron, on obtient $S\leq\sqrt{p}\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=p^2\frac{\sqrt{3}}{9}$

IV. Compléments

1. Autres relations trigonométriques

i) $\sin\widehat{A}+\sin\widehat{B}+\sin\widehat{C}=\frac{p}{R}$
Démonstration : D'après la formule des sinus, on a $\frac{1}{2R}=\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}$
D'où le résultat par sommation avec $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$
ii) $\sin\widehat{A}\times\sin\widehat{B}\times\sin\widehat{C}=\frac{S}{2R^2}$
Démonstration : D'après la formule des sinus, on a $\frac{1}{2R}=\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}$
D'où le résultat par produit abc = 4RS.

2. Relations métriques avec les rayons des cercles exinscrit, inscrit et circonscrit

i) S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c et S = $\sqrt{r\times r_a\times r_b\times r_c}$

ii) $2Rr_a = \frac{abc}{b+c-a}$, $2Rr_b = \frac{abc}{c+a-b}$, $2Rr_c = \frac{abc}{a+b-c}$
iii) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$
iv) $r_a + r_b + r_c = r + 4R$

3. Application (du théorème de la médiane)

Soit G isobarycentre du triangle.
Montrer que $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$
puis que, $\forall M \in \mathcal{P}$, on a $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$
En déduire que $MA^2+MB^2+MC^2$ est minimale ssi M = G.
